Vorlesung (10), 25.01.2022

[Wh.: • 7 erste Integrale H, P, L
• Schwerpunkt $S = \frac{1}{M}\sum m_j x_j \quad (M = m_1 + \dots + m_N)$
bewegt sich geradlinig gleichförmig,

$$S(t) = S_0 + \dot{S}_0 t.$$
]

(3.7) Invarianz unter Galilei-Transformationen

<u>Vorbemerkung</u>. Transformationen (Koordinatenwechsel) können die Lösung von Dgl.'n bzw. das Verständnis von dynamischen Systemen erheblich vereinfachen:

- Transformationen <u>im Ort</u>, d.h. Diffeomorphismen $\Phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ des Phasenraums eines Systems, z.B. die Transf. auf Polarkoordinaten (r, θ) im ebenen Kepler-Problem
- Transformationen <u>in der Zeit</u>, d.h. Diffeomorphismus $\psi : J \to I$ für die Zeitvariable des

Systems, z.B. $t \longmapsto \Theta(t)$ im ebenen Keplerproblem

Noch mehr größere Möglichkeiten ergeben sich durch Transformationen in Raum und Zeit. Betrachte dazu den erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times \Omega$ eines Systems $\dot{x} = f(x)$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und lasse Diffeomorphismen

$$\Phi : \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \times \Omega$$

(bzw. $\Phi: \tilde{G} \to G$ mit offenen $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$, $G \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$) zu.

Naheliegende Aufgabe: Wie transformiert sich das System?

Seien $y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann nennt man die Transformation

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad (s, y) \longmapsto (t, x),$$

$$t(s,y) = s$$
$$x(s,y) = y + s\cdot \dot{y}_0 + y_0$$

eine Galiläi-Transformation in Raum und Zeit.

Kommentare. (a) Eine Galiläi-Transformation induziert auch einen Diffeomorphismus im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,\ (s,y,\dot{y}) \mapsto (t,x,\dot{x}),$$

$$t = s$$
$$x = y + s\dot{y}_0 + y_0$$
$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{y}_0$$

(6) Eine solche Trafo induziert weiterhin einen Diffeo im erweiterten Phasenraum des N-Körperproblems wie folgt ($(a, \dot{a}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$)

$$\Phi : \mathbb{R} \times \Delta \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R} \times \Delta \times \mathbb{R}^{3N}$$
$$\big(s, (y_j), (\dot{y}_j)\big) \longmapsto \big(t, (x_j), (\dot{x}_j)\big),$$

$$t = s$$
$$x_j = y_j + s\dot{a} + a \qquad (j = 1, \ldots, N)$$
$$\dot{x}_j = \dot{y}_j + \dot{a} \quad ,$$

wo

$$\Delta = \{ (x_j) \in \mathbb{R}^{3N} : x_i \neq x_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq N \}$$

ist.

Denn für $1 \leq i < j \leq N$ ist:

$$x_j - x_i = (y_j + s\dot{a} + a) - (y_i + s\dot{a} + a) = y_j - y_i \, .$$

Also ist

$$(s, y, \dot{y}) \in \mathbb{R} \times \Delta \times \mathbb{R}^{3N} \iff \Phi(s, y, \dot{y}) \in \mathbb{R} \times \Delta \times \mathbb{R}^{3N}.$$

Proposition. Seien $(a, \dot{a}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ beliebig und $\Phi: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \times \Omega$ die induzierte Galilei-Transformation. Dann ist $I \to \Omega$, $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ genau dann Lösg. des N-Körperproblems, wenn $t \mapsto (t, y(t), \dot{y}(t)) := \Phi^{-1}(t, x(t), \dot{x}(t))$ Lösg. des N-Körperproblems ist.

Beweis. Erinnere das N-Körperproblem

$$\ddot{x}_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} m_i \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3} \quad (j = 1, \dots, N)$$

Ist nun $t \mapsto x(t)$ Lösung, so hatten wir bereits gesehen, dass

$$x_j(t) - x_i(t) = y_j(t) - y_i(t),$$

für alle $t \in I = I(x_0, \dot{x}_0)$ (bei beliebigen $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$), $1 \leq i < j \leq N$. Außerdem gilt für $j = 1, \dots, N$:

$$\ddot{x}_j(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{y}_j(t) + \dot{a} \right) = \ddot{y}_j(t),$$

so dass gilt:

$$m_j \ddot{y}_j = m_j \ddot{x}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{x_j - x_i}{\| x_j - x_i \|^3} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{y_j - y_i}{\| y_j - y_i \|^3}. \qquad \blacksquare$$

Kommentar. (a) Ist nun $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$ eine Anfangslage des N-Körperproblems und $(S_0, \dot{S}_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ die induzierte Anfangslage des Schwerpunkts, so kann durch die Galiläi-Trafo mit $(a, \dot{a}) = (S_0, \dot{S}_0)$ erreichen, dass der Schwerpunkt $C \in \mathbb{R}^3$ in den transformierten Koordinaten $(y, \dot{y})$ im Ursprung ruht, $C(t) = 0$, $\forall t \in I(x_0, \dot{x}_0)$:

$$C(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j y_j(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j(t) - S_0 - t \cdot \dot{S}_0 \right),$$

also:

$$C(0) = \underbrace{\frac{1}{M} \sum m_j x_j(0)}_{= S_0} - \Big(\underbrace{\frac{1}{M} \sum m_j}_{= 1} \Big) S_0 = 0$$

und

$$\dot{C}(t) = \underbrace{\frac{1}{M}\sum_j m_j \dot{x}_j(t)}_{= \dot{S}(t) = \dot{S}_0} - (\underbrace{\frac{1}{M}\sum m_j}_{=1})\dot{S}_0 = 0.$$

(wegen $S(t) = S_0 + \dot{S}_0 t$ $\Longrightarrow$ $C(t) = 0, \forall t$.

(b) Der Impulserhaltungssatz reduziert damit die Dimension des Phasenraums $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ gleich um 6, weil man sich jetzt auf die Anfangslagen $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$ zurückziehen kann, wo $(S_0, \dot{S}_0) = (0,0)$ ist,

$$W := \{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^{6N} : \sum m_j x_j = 0, \sum m_j \dot{x}_j = 0\}.$$

$W \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ ist ein linearer Unterraum der Dimension $6N-6$ und es reicht das N-Körperproblem auf $\Omega \cap W \subseteq \mathbb{R}^{6N-6}$ zu betrachten. Auf diesem gibt es dann noch die 4 ersten Integrale $H, L_1, L_2, L_3 : \Omega \cap W \to \mathbb{R}$. Wenn man möchte, kann man also die vektorwertige Funktion $I : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$I(t,x,\dot{x}) = S(x) - tP(x)$$

als weiteres ($\mathbb{R}^3$-wertiges) erste Integral (auf dem erweiterten Phasenraum) auffassen, denn offenbar ist:

$$\frac{d}{dt} I(t, x(t), \dot{x}(t)) = \underbrace{\dot{S}(x(t))}_{=P} - P(\dot{x}(t)) - t \underbrace{\dot{P}(\dot{x}(t))}_{=0} = 0.$$

Das sind die 10 klassischen ersten Integrale.

(b) Ein Satz von S. Kowalewski besagt, dass es kein unabhängiges weiteres gibt.

(c) Für $N = 2$ hat man daher die Chance, das 2-Körperproblem vollständig durch Transformationen und Quadraturen zu lösen. Das ist so:
Da wir nun

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \qquad (*)$$

annehmen, führen wir eine relative Koordinate

$x \in \mathbb{R}^3$ durch

$$x := x_2 - x_1$$

ein und stelle fest, dass sich dann (x_1, x_2) wegen $(*)$ aus x so ergeben:

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2 = -\frac{m_2}{m_1}(x + x_1)$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{1 + \frac{m_2}{m_1}}_{= \frac{m_1 + m_2}{m_1}}\Big) x_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot x \qquad \Rightarrow x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} x.$$

und ähnlich:

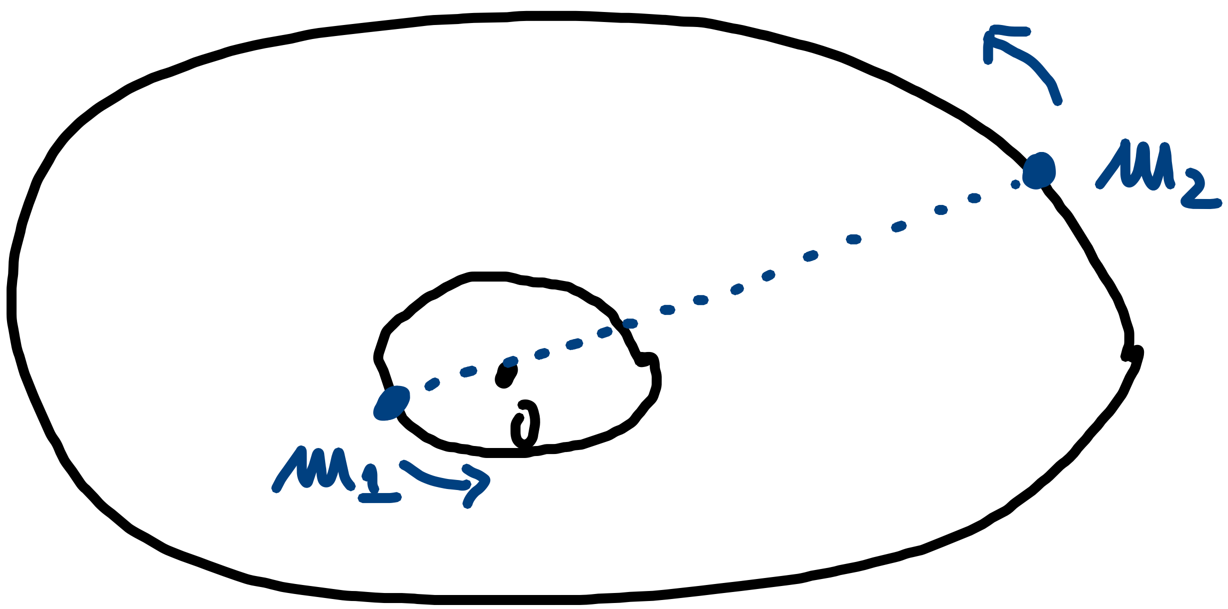
$$x_2 = + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x .$$

Beachte nun, dass $t \longmapsto x(t)$ folg. Dgl. erfüllt:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -m_1 \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3} + m_2 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}$$

$$= -m_1 \frac{x}{\|x\|^3} - m_2 \frac{x}{\|x\|^3} = -M \frac{x}{\|x\|^3} \quad (M = m_1 + m_2),$$

also das Keplerproblem löst, welches wir bereits vollständie integriert haben. x_1 und x_2 bewegen sich also diametral zu ihrem Schwerpunkt (der im Nullpunkt ruht) auf Ellipsen (bzw. Parabeln oder Hyperbeln bei $H \geq 0$).



(d) Ist $\mu := \frac{m_2}{M} \ll 1$ sehr klein, also $1-\mu \approx 1$, so bewegt sich also Körper 1 so gut wie gar nicht und Körper 2 auf der (nur leicht skalierten) Kepler-Ellipse.

(e) Man spricht vom „restringierten 2-Körperproblem", wenn man $m_2 = 0$ setzt (und $m = m_1$). Wegen des Kürzens von träger und schwerer Masse geht dann das 2-Körperproblem über in:

$$m_1 \ddot{x}_1 = - m_2 m_1 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3} \Longrightarrow \ddot{x}_1 = 0$$

($\Rightarrow x_1 = 0$ bei Anfangsruhelage $((x_1)_0, (\dot{x}_1)_0) = (0,0)$).

$$\cancel{m_2} \ddot{x}_2 = - m_1 \cancel{m_2} \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3} \Longrightarrow \ddot{x}_2 = m \cdot \frac{x_2}{\|x_2\|^3}$$

(also Kepler mit Sonnenmasse).

(3.8) Der Satz von Painlevé.

Fragestellung: Für welche Anf.-lage $(x_0, \dot{x}_0)$ im N-Körperproblem gilt denn eigentlich

$$I(x_0, \dot{x}_0) \neq \mathbb{R} \; ?$$

Kommt es dann zu einem „Zusammenstoß" zweier Körper?

(a) Der Fall $N=2$.

(i) Erinnerung. Beim Keplerproblem $\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3}$ auf $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ war $I(x, \dot{x}) = \mathbb{R}$, falls der Drehimpuls

$$L(x,\dot{x}) = x \times \dot{x} \neq 0$$

war. Im Fall $L(x,\dot{x}) = 0$ hatten wir, dass je nach Anfangslage entweder

$$t_+(x,\dot{x}) < \infty \quad \text{oder} \quad t_-(x,\dot{x}) > -\infty$$

In diesem Fall galt dann („Sturz in die Sonne in endlicher Zeit"):

$$\lim_{t \to t_+} \varphi^t(x, \dot{x}) = 0 \qquad \text{bei} \quad t_+(x_0, \dot{x}_0) < \infty$$

$$\lim_{t \to t_-} \varphi^t(x, \dot{x}) = 0 \qquad \text{bei} \quad t_-(x_0, \dot{x}_0) > -\infty$$

Es gilt also im Keplerproblem:

$$I(x, \dot{x}) \neq \mathbb{R} \iff L(x, \dot{x}) = 0 .$$